54

Es sind alle natürlichen Zahlen $k \geq 0$ zu bestimmen, die für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ die Aussage implizieren, dass mindestens eine der Zahlen n oder $n+k$ oder $n+2k$
durch 3 teilbar ist. Begründung!

Lösung:
Seien $n = 3q + r$ und $k = 3s + t$.
Dann sind
$n + k = 3q + r + 3s + t = 3(q + s) + r + t$ und
$n + 2k = 3q + r + 2(3s + t) = 3q + r + 2 \cdot 3s + 2t = 3(q + 2s) + r + 2t$.

Zu $n = 3q + r$ gilt
$3 \mid n$ wenn r = 0.

Zu $n + k = 3q + r + 3s + t = 3(q + s) + r + t$ gilt
$3 \mid n + k$ wenn (r = 0 und t = 0) oder (r = 1 und t = 2) oder (r = 2 und t = 1).
Zu $n + 2k = 3q + r + 2(3s + t) = 3q + r + 2 \cdot 3s + 2t = 3(q + 2s) + r + 2t$ gilt
$3 \mid n + 2k$ wenn (r = 0 und t = 0) oder (r = 1 und t = 1) oder (r = 2 und t = 2).

Weil n unbeschränkt gelten soll, müssen die Fälle $n = 3q + r$ mit r = 0 ausgeschlossen werden.
Das heißt, die obige Bedingung, alle $k \in \mathbb{N}_0$ zu bestimmen, für die eine der Zahlen
n oder $n + k$ oder $n + 2k$ durch 3 teilbar sind, gilt für alle $k = 3s + t$ mit $t \neq 0$.
Was zu beweisen war.