59

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen.

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n+1} \cdot 3^{n+k} = 6^n \left(3^{n+1} - 1\right)$$

Lösung:

$\sum_{k=0}^{n} 2^{n+1} \cdot 3^{n+k} = 6^n \left(3^{n+1} - 1\right)$ ergibt durch Umformung $2^{n+1} \cdot 3^n \sum_{k=0}^{n} 3^k = 6^n \left(3^{n+1} - 1\right)$

A(1): $2^{1+1} \cdot 3^1 \sum_{k=0}^{1} 3^k = 6^1 \left(3^{1+1} - 1\right)$

$$2^2 \cdot 3\left(3^0 + 3^1\right) = 6\left(3^2 - 1\right)$$

$$4 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 8$$

48 = 48 womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $2^{n+1} \cdot 3^n \sum_{k=0}^{n} 3^k = 6^n \left(3^{n+1} - 1\right)$

A(n+1): $2^{(n+1)+1} \cdot 3^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} 3^k = 6^{n+1} \left(3^{(n+1)+1} - 1\right) = 6^{n+1} \left(3^{n+2} - 1\right)$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$2^{(n+1)+1} \cdot 3^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} 3^k = 2 \cdot 3 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^n \sum_{k=0}^{n} 3^k + 2^{n+1+1} \cdot 3^{n+1} \cdot 3^{n+1} = 6^{n+1} \left(3^{n+2} - 1\right)$$

$$6 \cdot 6^n \left(3^{n+1} - 1\right) + 2^{n+1+1} \cdot 3^{n+1} \cdot 3^{n+1} = 6^{n+1} \left(3^{n+1} - 1\right) + 2 \cdot 2^{n+1} \cdot 3^{n+1} \cdot 3^{n+1}$$

$$= 6^{n+1} \left(3^{n+1} - 1\right) + 2 \cdot 6^{n+1} \cdot 3^{n+1} = 6^{n+1} \left[\left(3^{n+1} - 1\right) + 2 \cdot 3^{n+1}\right] = 6^{n+1} \left(1 \cdot 3^{n+1} + 2 \cdot 3^{n+1} - 1\right)$$

$$= 6^{n+1} \left(3 \cdot 3^{n+1} - 1\right) = 6^{n+1} \left(3^{n+2} - 1\right)$$

Was zu beweisen war.