61

Es sind alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ zu bestimmen, die durch das Produkt ihrer echten Teiler teilbar sind. Die Antwort ist zu begründen.

Lösung:

Illustration

n	PFZ	T_n	eT_n	$P(eT_n)$	$P(eT_n) \mid n$
4	2^2	1,2,2,4	1,2,2	4	$4 \mid 4$
7	7^1	1,7	1	1	$1 \mid 7$
27	3^3	1,3,9,27	1,3,9	27	$27 \mid 27$
10	$2^1 \cdot 5^1$	1,2,5,10	1,2,5	10	$10 \mid 10$
77	$7^1 \cdot 11^1$	1,7,11,77	1,7,11	77	$77 \mid 77$

Satz: Eine natürliche Zahl n stimmt genau dann mit dem Produkt ihrer echten Teiler überein, wenn für ihre „kanonische Primfaktorzerlegung“ (PFZ) $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$ eine der folgenden Alternativen gilt:

A1: $t = 1$ und $\alpha_1 \leq 3$

A2: $t = 2$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$

Es ist also zu zeigen:

1. Gilt für die PFZ der Zahl n eine der Alternativen A1 oder A2, dann ist n das Produkt ihrer echten Teiler.
2. Ist n das Produkt ihrer echten Teiler, dann erfüllt die PFZ der Zahl n eine der Alternativen A1 oder A2.

Zu 1.

A1: Wenn $n = p_1^{\alpha_1}$ mit $\alpha_1 \leq 3$,

dann sind die echten Teiler von n $\{1\}$ oder $\{1, p_1^1, p_1^1\}$ oder $\{1, p_1^1, p_1^2\}$ und

ihr Produkt ist tatsächlich $p_1^1 = n$ oder $p_1^2 = n$ oder $p_1^3 = n$.

A2: Wenn $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$ mit $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$,

dann sind die echten Teiler von n $\{1, p_1^1, p_2^1\}$ und ihr Produkt ist tatsächlich $p_1^1 \cdot p_2^1 = n$.

Zu 2.

Zunächst ist zu zeigen $t \leq 2$, und zwar indirekt.

Angenommen, es gilt $t > 2$, dann ist $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\alpha_t}$. Daraus folgend müsste gezeigt werden $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_t = 1$.

Angenommen, es existiert für $1 \leq k \leq t$ ein $\alpha_k > 1$, dann sind sowohl p_k als auch $p_k^{\alpha_k}$ echte Teiler von n. Da n das Produkt ihrer echten Teiler ist, folgt somit, dass n den Faktor $p_k \cdot p_k^{\alpha_k} = p_k^{\alpha_k + 1}$ enthält, was $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_t = 1$ widerspricht.