62

Seien $1 \le k < n$ natürliche Zahlen. Die Gültigkeit der Gleichung ist zu beweisen oder zu widerlegen.

$$\binom{n+3}{k+3} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n^3+6n^2+11n+6}{k^3+6k^2+11k+6}$$

Lösung 1:

Faktorisierung von $n^3+6n^2+11n+6$

$$\begin{array}{l} (n^3+6n^2+11n+6):(n+1) = n^2+5n+6 \\ \underline{-(n^3+n^2)} \\ \quad 5n^2+11n \\ \quad \underline{-(5n^2+5n)} \\ \qquad 6n+6 \\ \qquad \underline{-(6n+6)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Faktorisierung von n^2+5n+6

$$\begin{array}{l} (n^2+5n+6):(n+2) = n+3 \\ \underline{-(n^2+2n)} \\ \quad 3n+6 \\ \quad \underline{-(3n+6)} \\ \qquad 0 \end{array}$$

Das ergibt also: $n^3+6n^2+11n+6 = (n+1)(n+2)(n+3)$

$$\binom{n+3}{k+3} = \frac{(n+3)!}{(n+3-(k+3))!(k+3)!} = \frac{(n+3)!}{(n+3-k-3)!(k+3)!} = \frac{(n+3)!}{(n-k)!(k+3)!}$$

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{n^3+6n^2+11n+6}{k^3+6k^2+11k+6} = \binom{n}{k} \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{n!(n+1)(n+2)(n+3)}{(n-k)!k!(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(n+3)!}{(n-k)!(k+3)!}$$

Was zu beweisen war.

Lösung 2:

Seien $1 \le k < n$ natürliche Zahlen. Es gilt zu beweisen:

$$\binom{n+3}{k+3} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n^3+6n^2+11n+6}{k^3+6k^2+11k+6}$$

Durch Äquivalenzumformung ergibt sich:

$$\binom{n+3}{k+3} = \frac{(n+3)!}{(k+3)!\cdot((n+3)-(k+3))!} = \frac{n!\cdot(n+1)(n+2)(n+3)}{k!\cdot(k+1)(k+2)(k+3)\cdot(n-k)!} =$$

$$\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \binom{n}{k}\cdot\frac{(n^2+3n+2)(n+3)}{(k^2+3k+2)(k+3)} = \binom{n}{k}\cdot\frac{n^3+6n^2+11n+6}{k^3+6k^2+11k+6}$$

q.e.d.