64

Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen.

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

Lösung:

A(1): $\sum_{k=1}^{1}(2k-1)^2 = \frac{1(2\cdot 1-1)(2\cdot 1+1)}{3}$

$$(2\cdot 1-1)^2 = \frac{1\cdot 1\cdot 3}{3}$$

$$1^2 = \frac{3}{3}$$

1 = 1 womit der Induktionsanfang gilt.

A(n): $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \frac{(n+1)(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}{3} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$

Es ist zu zeigen, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + (2n+1)^2 = (2n+1)\left[\frac{n(2n-1)}{3} + (2n+1)\right]$$

$$= (2n+1)\left[\frac{n(2n-1)+3(2n+1)}{3}\right] = (2n+1)\left[\frac{2n^2-n+6n+3}{3}\right] = (2n+1)\cdot\frac{2n^2+5n+3}{3}$$

Faktorisierung von $2n^2+5n+3$ ergibt:

$$\begin{array}{l} (2n^2+5n+3):(n+1) = 2n+3 \\ \underline{-(2n^2+2n)} \\ \qquad 3n+3 \\ \qquad \underline{-(3n+3)} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$(2n+1)\cdot\frac{2n^2+5n+3}{3} = \frac{(2n+1)\cdot(n+1)\cdot(2n+3)}{3} = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$$

Was zu beweisen war.