66

Sei p eine von 2 verschiedene Primzahl. Es ist zu beweisen, dass 24 ein Teiler von $p^3 - p$ ist.

p^3 - p ist durch 24 teilbar:
Beispiele
$3^3 - 3 = 24$
$5^3 - 5 = 120 = 24 \cdot 5$
$7^3 - 7 = 336 = 24 \cdot 3 \cdot 7$
$11^3 - 11 = 1320 = 24 \cdot 5 \cdot 11$ etc.

$$p^3 - p = p(p^2 - 1) = p(p+1)(p-1)$$

Bei drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist immer eine durch 3 teilbar:
2,3,4 3,4,5 4,5,6 5,6,7 7,8,9 etc.

Also ist von $p(p+1)(p-1)$ eine der Zahlen immer durch 3 teilbar.

Da p eine Primzahl ist, also eine ungerade Zahl ist, müssen $(p-1)$ und $(p+1)$ als Vorgänger und Nachfolger von p gerade Zahlen sein.

Sie sind also beide durch 2 teilbar. Teilt man sie sogar durch 4, so bleibt als Rest entweder die 2 oder die 0.

Wenn folglich
$(p-1) \equiv 2 \bmod 4$
ist, dann muss
$(p+1) \equiv 0 \bmod 4$
sein oder umgekehrt.

Das bedeutet: eine der beiden Zahlen ist nicht nur durch 2, sondern auch durch 4 teilbar.
Insgesamt ergibt sich also zusammen mit der Teilbarkeit durch 3:

$$2 \bullet 4 \bullet 3 = 24 \mid p(p+1)(p-1) = p^3 - p$$
Was zu beweisen war.