

Für alle natürlichen Zahlen $k \geq 1, n \geq 2$ ist durch vollständige Induktion die Gleichung zu

beweisen $\sum_{t=0}^{k-1} n^t = \frac{n^k - 1}{n - 1}$.

Lösung:

$$A(1): \sum_{t=0}^{1-1} n^t = \sum_{t=0}^0 n^t = n^0 = 1 = \frac{n^1 - 1}{n - 1} = \frac{n - 1}{n - 1} = 1, \text{ womit der Induktionsanfang gilt.}$$

$$A(k): \sum_{t=0}^{k-1} n^t = \frac{n^k - 1}{n - 1}$$

$$A(k+1): \sum_{t=0}^{k+1-1} n^t = \sum_{t=0}^k n^t = \frac{n^{k+1} - 1}{n - 1}$$

Es ist zu zeigen, dass gilt $\sum_{t=0}^k n^t = \sum_{t=0}^{k-1} n^t + n^k = \frac{n^{k+1} - 1}{n - 1}$

$$\sum_{t=0}^k n^t = \sum_{t=0}^{k-1} n^t + n^k = \frac{n^k - 1}{n - 1} + n^k = \frac{n^k - 1 + n^k(n - 1)}{n - 1} = \frac{n^k - 1 + n \cdot n^k - n^k}{n - 1} = \frac{n \cdot n^k - 1}{n - 1} = \frac{n^{k+1} - 1}{n - 1}$$

Was zu beweisen war.