83

Die folgenden Reihen sind in Terme als Σ-Summe, Π-Produkt oder einer Kombination aus Σ-Summe/ Π-Produkt bzw. Π-Produkt/ Σ-Summe umzuformen. Es gibt evtl. mehrere Möglichkeiten:

a) $7+13+19+25+31+37+43$

b) $4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11$

c) $60+120+180+240+300$

d) $150+300+450$

e) $1+3+7+15+31$

f) $8+96+994+9992$

g) $2+5+18+65+218$

h) $5\cdot7\cdot9$

Lösungen:

a) $7+13+19+25+31+37+43$

Es sind 7 Summmanden, die Differenz zwischen den einzelnen Summanden ist immer gleich 6, folglich ist die Reihe linear.

$$7+13+19+25+31+37+43=(6+1)+(12+1)+(18+1)+(24+1)+(30+1)+(36+1)+(42+1)\,.$$

$(6+1)+(12+1)+(18+1)+(24+1)+(30+1)+(36+1)+(42+1)$
kann dargestellt werden als
$(6\cdot1+1)+(6\cdot2+1)+(6\cdot3+1)+(6\cdot4+1)+(6\cdot5+1)+(6\cdot6+1)+(6\cdot7+1)$
woraus sich $7+13+19+25+31+37+43=\sum\limits_{k=1}^{7}(6k+1)$ ergibt.

$(6+1)+(12+1)+(18+1)+(24+1)+(30+1)+(36+1)+(42+1)$
kann, da $6=1\cdot2\cdot3=3!$ ist, auch dargestellt werden als
$(3!\cdot1+1)+(3!\cdot2+1)+(3!\cdot3+1)+(3!\cdot4+1)+(3!\cdot5+1)+(3!\cdot6+1)+(3!\cdot7+1)$.
Weil $3!=\prod\limits_{t=1}^{3}t$ ist, so ergibt sich die weitere Darstellung

$$7+13+19+25+31+37+43=\sum_{k=1}^{7}\prod_{t=1}^{3}(t\cdot k+1)\,.$$

b) $4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11$

Es sind 8 Faktoren beginnend mit 4, also heißt die Reihe $4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11=\prod_{k=4}^{11}k$

c) $60+120+180+240+300$

Es sind 5 Summmanden, die Differenz zwischen den einzelnen Summanden ist immer gleich 60, folglich ist die Reihe linear.

$$60+120+180+240+300=1\cdot60+2\cdot60+3\cdot60+4\cdot60+5\cdot60$$

Eine Darstellung von $1\cdot60+2\cdot60+3\cdot60+4\cdot60+5\cdot60$ wäre somit

$$60+120+180+240+300=\sum_{k=1}^{5}60\mathrm{k}\,.$$

Eine andere (vgl. die Überlegungen in Aufgabe a)) wäre

$$60+120+180+240+300=\sum_{k=1}^{5}\prod_{t=1}^{3}10\cdot\mathrm{t}\cdot\mathrm{k}$$

d) $150+300+450$

Es sind 3 Summmanden, die Differenz zwischen den einzelnen Summanden ist immer gleich 150, folglich ist die Reihe linear.

$$150+300+450=150\cdot1+150\cdot2+150\cdot3=$$
$$(10+20+30+40+50)\cdot1+(10+20+30+40+50)\cdot2+(10+20+30+40+50)\cdot3=$$
$$(10\cdot1+20\cdot1+30\cdot1+40\cdot1+50\cdot1)+(10\cdot2+20\cdot2+30\cdot2+40\cdot2+50\cdot2)+(10\cdot3+20\cdot3+30\cdot3+40\cdot3+50\cdot3)$$

Die Reihe könnte also dargestellt werden durch

$$150+300+450=\sum_{k=1}^{3}150k$$

oder durch

$$150+300+450=\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}(10\cdot k)\cdot t$$

oder durch

$$150+300+450=\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=1}^{5}10\cdot k\cdot t$$

e) $1+3+7+15+31$

Es sind 5 Summmanden, die Differenz zwischen den einzelnen Summanden ist jeweils ein Vielfaches von 2, folglich ist die Reihe exponential.

$$1+3+7+15+31=(2-1)+(4-1)+(8-1)+(16-1)+(32-1)=(2^1-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+(2^4-1)+(2^5-1)$$

Die Reihe ist also darzustellen – je nach Anfang der Laufzahl k – durch

$$1+3+7+15+31=\sum_{k=1}^{5}(2^k-1)$$

oder

$$1+3+7+15+31=\sum_{k=0}^{4}(2^{k+1}-1)$$

oder

$$1+3+7+15+31=\sum_{k=2}^{6}(2^{k-1}-1)$$

f) $8+96+994+9992$

Es sind 4 Summmanden, die Differenzen zwischen den einzelnen Summanden sind 88, 898, 8998, vermutlich ist die Reihe exponential.

$$8+96+994+9992=(10-2)+(100-4)+(1000-6)+(10000-8)=$$
$$(10^1-2\cdot 1)+(10^2-2\cdot 2)+(10^3-2\cdot 3)+(10^4-2\cdot 4)$$

also gilt

$$8+96+994+9992=\sum_{k=1}^{4}(10^k-2k)$$

g) $2+5+18+65+218$

Es sind 5 Summmanden, die Differenzen zwischen den einzelnen Summanden sind 3, 13, 47, 153, vermutlich ist die Reihe exponential.

$$2+5+18+65+218=(3-1)+(9-4)+(27-9)+(81-16)+(243-25)=$$
$$(3^1-1^2)+(3^2-2^2)+(3^3-3^2)+(3^4-4^2)+(3^5-5^2)$$

also gilt

$$2+5+18+65+218=\sum_{k=1}^{5}(3^k-k^2)$$

h) $5\cdot 7\cdot 9$

Es sind 3 Faktoren.

$$5\cdot 7\cdot 9=(2\cdot 2+1)\cdot(2\cdot 3+1)\cdot(2\cdot 4+1)=$$
$$(2+3)\cdot(3+4)\cdot(4+5)=\big((1+1)+(1+2)\big)\cdot\big((2+1)+(2+2)\big)\cdot\big((3+1)+(3+2)\big)$$

Das ergibt die möglichen Darstellungen $5\cdot 7\cdot 9=\prod_{k=2}^{4}(2k+1)$ oder $5\cdot 7\cdot 9=\prod_{k=2}^{4}(k+(k+1))$

oder $5\cdot 7\cdot 9=\prod_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}(s+k)$