

Für alle $k \leq n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist die Gültigkeit folgender Gleichung durch vollständige Induktion zu beweisen.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0$$

Hinweis: Der Beweis stützt sich auf Aufgabe 22; vgl. auch Aufgabe 34!

Lösung:

$$A(1): \sum_{k=0}^1 (-1)^k \cdot \binom{1}{k} = (-1)^0 \cdot \binom{1}{0} + (-1)^1 \cdot \binom{1}{1} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0 \text{ womit der Induktionsanfang gilt.}$$

$$A(n): \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0 \Leftrightarrow (-1)^0 \cdot \binom{n}{0} + (-1)^1 \cdot \binom{n}{1} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = 0$$

$A(n+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{n+1}{k} = 0 \Leftrightarrow (-1)^0 \cdot \binom{n+1}{0} + (-1)^1 \cdot \binom{n+1}{1} + \dots + (-1)^n \cdot \binom{n+1}{n} + (-1)^{n+1} \cdot \binom{n+1}{n+1} = 0$$

Wie in Aufgabe 22 bewiesen gilt:

$$\binom{n+1}{x} = \binom{n}{x} + \binom{n}{x-1}$$

Folglich ist zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{n+1}{k} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n+1} \left((-1)^k \cdot \binom{n}{k} + (-1)^k \cdot \binom{n}{k-1} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \left((-1)^k \cdot \binom{n}{k} + (-1)^k \cdot \binom{n}{k-1} \right) &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \cdot \binom{n}{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} + (-1)^{n+1} \cdot \binom{n}{n+1} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k-1} + (-1)^{n+1} \cdot \binom{n}{(n+1)-1} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} + 0 + \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k-1} + (-1)^{n+1} \cdot \binom{n}{n} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} + (-1)^0 \cdot \binom{n}{0-1} + (-1)^1 \cdot \binom{n}{1-1} + (-1)^2 \cdot \binom{n}{2-1} + \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot \binom{n}{n} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} + 0 + (-1)^1 \cdot \binom{n}{0} + (-1)^2 \cdot \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \cdot \binom{n}{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot \binom{n}{n} \end{aligned}$$

Multipliziert man jetzt mit $(-1)^{-1} = -1$, so erhält man

$$\begin{aligned} - \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} + (-1)^0 \cdot \binom{n}{0} + (-1)^1 \cdot \binom{n}{1} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} \\ = - \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot (-1+1) = 0 \end{aligned}$$

Was zu beweisen war.