89

Für alle $n \geq 1$ ist die Gültigkeit folgender Gleichung zu beweisen

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Lösung:

A(1): $\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = \frac{6}{3} = 2$ und $\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1(1+1) = 1 \cdot 2 = 2$

Da 2=2 gilt der Induktionsanfang.

A(n): $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)(n+1+2)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

Nun gilt (abspalten):

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+1+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$

n.z.z.

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

dividiert man die Gleichung durch $\left[(n+1)(n+2)\right]$ dann erhält man

$\frac{n}{3} + 1 = \frac{n+3}{3}$ und bringt sie auf den Hauptnenner 3, so ergibt sich

$\frac{n+3}{3} = \frac{n+3}{3} \Leftrightarrow n+3 = n+3$

Was zu beweisen war.