90

Sei $s \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben und für alle $n \geq 1 \in \mathbb{N}$ gilt zu beweisen:

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{t=0}^{s}(k+t)=\frac{1}{s+2}\prod_{t=0}^{s+1}(n+t)$$

Lösung:

A(1):
$$\sum_{k=1}^{1}\prod_{t=0}^{s}(k+t)=\frac{1}{s+2}\prod_{t=0}^{s+1}(1+t)=\frac{1}{s+2}\prod_{t=0}^{s}(1+t)(1+s+1)=\frac{1}{s+2}\prod_{t=0}^{s}(1+t)(s+2)$$
$$=\frac{s+2}{s+2}\cdot\prod_{t=0}^{s}(1+t)=\prod_{t=0}^{s}(1+t)$$

und $\sum_{k=1}^{1}\prod_{t=0}^{s}(k+t)=\prod_{t=0}^{s}(1+t)$

Da $\prod_{t=0}^{s}(1+t)=\prod_{t=0}^{s}(1+t)$ gilt der Induktionsanfang.

A(n): $\sum_{k=1}^{n}\prod_{t=0}^{s}(k+t)=\frac{1}{s+2}\prod_{t=0}^{s+1}(n+t)$

A(n+1): $\sum_{k=1}^{n+1}\prod_{t=0}^{s}(k+t)=\frac{1}{s+2}\prod_{t=0}^{s+1}(n+1+t)$

Nun gilt (abspalten):

$$\sum_{k=1}^{n+1}\prod_{t=0}^{s}(k+t)=\sum_{k=1}^{n}\prod_{t=0}^{s}(k+t)+\prod_{t=0}^{s}(n+1+t)=\frac{1}{s+2}\prod_{t=0}^{s+1}(n+t)+\prod_{t=0}^{s}(n+1+t)$$

n.z.z.

$$\frac{1}{s+2}\prod_{t=0}^{s+1}(n+t)+\prod_{t=0}^{s}(n+1+t)=\frac{1}{s+2}\prod_{t=0}^{s+1}(n+1+t)\Leftrightarrow\frac{1}{s+2}\prod_{t=0}^{s+1}(n+t)+\prod_{t=0}^{s}(n+t+1)=\frac{1}{s+2}\prod_{t=0}^{s+1}(n+t+1)$$

wenn man t statt von 0 bis s von 1 bis s+1 bzw. t statt von 0 bis s+1 von 1 bis s+2 laufen lässt, erhält man

$$\frac{1}{s+2}\prod_{t=0}^{s+1}(n+t)+\prod_{t=1}^{s+1}(n+t)=\frac{1}{s+2}\prod_{t=1}^{s+2}(n+t)\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{s+2}\cdot(n+0)\cdot\prod_{t=1}^{s+1}(n+t)+\prod_{t=1}^{s+1}(n+t)=\frac{1}{s+2}\cdot\prod_{t=1}^{s+1}(n+t)\cdot(n+s+2)\Leftrightarrow$$
$$\frac{n}{s+2}\cdot\prod_{t=1}^{s+1}(n+t)+\prod_{t=1}^{s+1}(n+t)=\prod_{t=1}^{s+1}(n+t)\cdot\left(\frac{n+s+2}{s+2}\right)\Leftrightarrow$$
$$\prod_{t=1}^{s+1}(n+t)\cdot\left(\frac{n}{s+2}+1\right)=\prod_{t=1}^{s+1}(n+t)\cdot\left(\frac{n}{s+2}+\frac{s+2}{s+2}\right)=\prod_{t=1}^{s+1}(n+t)\left(\frac{n+s+2}{s+2}\right)\Leftrightarrow\prod_{t=1}^{s+1}(n+t)\left(\frac{n+s+2}{s+2}\right)$$

Was zu beweisen war.